CHAPTER 8

การใช้ Combinatorial Proof แก้ปัญหาอนุกรม Combination

Ex $\quad C(n+r+1,r) = \sum_{j=0}^{r} C(n+j, j)$

Ex $\quad \binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{7}{2}+\binom{8}{3}=\binom{9}{3}$

แนวคิด พิจารณา การเลือกของ 3 ชิ้น จาก 9 ($a_1, a_2, ..., a_9$) ชิ้น ได้ C(9,3) วิธี แต่เราอาจพิจารณาอีกวิธีหนึ่งโดย พิจารณาว่าจะเลือก a_1 หรือไม่ก่อน ; ถ้าไม่เลือก a_1 จะต้องเลือกทั้ง 3 ชิ้น จาก 8 ชิ้นที่เหลือ (ไม่มี a_1) ได้ C(8,3) วิธี ; ถ้าเลือก a_1 ให้พิจารณาต่อว่า จะเลือก a_2 หรือไม่ ถ้าไม่เลือก a_2 จะต้องเลือก 2 ชิ้น (เลือก a_1 ไปแล้วชิ้นหนึ่ง) จาก 7 ชิ้น (หัก a_1 และ a_2 ออก) ได้ C(7,2) วิธี ; ถ้าเลือก a_1 และเลือก a_2 ให้พิจารณาว่าจะเลือก a_3 หรือไม่ ถ้าไม่เลือก a_3 จะต้องเลือกอีก 1 ชิ้น (เลือก a_1 และ a_2 ไปแล้ว) จาก 6 ชิ้น ได้ C(6,1) วิธี ; ถ้าเลือก a_1 และ a_2 และ a_3 ก็ครบ 3 ชิ้น ได้ 1 วิธี (C(5,0) = 1) นั่นคือ

$$\binom{9}{3} = \binom{8}{3}+\binom{8}{2} = \binom{8}{3}+\left(\binom{7}{2}+\binom{7}{1}\right)$$

$$= \binom{8}{3}+\left(\binom{7}{2}+\left(\binom{6}{1}+\binom{6}{0}\right)\right) = \binom{8}{3}+\left(\binom{7}{2}+\left(\binom{6}{1}+\binom{5}{0}\right)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{n+i}{n}=\binom{n+r+1}{n+1}$$

Ex $\quad \binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}=\binom{9}{6}$

แนวคิด พิจารณาการเลือกของ 6 ชิ้น จาก 9 ($a_1, ..., a_9$) ชิ้น โดยพิจารณาว่าจะเลือก a_1 หรือ ไม่ ; ถ้าเลือก a_1 จะต้องเลือกอีก 5 ชิ้น จาก 8 ชิ้น (ไม่มี a_1) ได้ C(8,5) วิธี ; ถ้าไม่เลือก a_1 ให้พิจารณาว่า จะเลือก a_2 หรือไม่ ; ถ้าไม่เลือก a_1 แต่เลือก a_2 จะต้องเลือกอีก 5 ชิ้น (มี a_2 1 ชิ้น แล้ว) จาก 7 ชิ้น (ไม่มี a_1 และ a_2) ได้ C(7,5) วิธี ; ถ้าไม่เลือก a_1 และ ไม่เลือก a_2 ให้พิจารณาต่อว่า จะเลือก a_3 หรือไม่ ; ถ้าไม่เลือก a_1 ไม่เลือก a_2 แต่เลือก a_3 จะต้องเลือกอีก 5 ชิ้น (มี a_3 1 ชิ้นแล้ว) จาก 6 ชิ้น (ไม่มี a_1, a_2, a_3) ได้ C(6,3) วิธี ; ถ้าไม่เลือก a_1 ไม่เลือก a_2 และ ไม่เลือก a_3 จะต้องเลือกของทั้ง 6 ชิ้นจาก 6 ชิ้นที่เหลือ ซึ่ง ได้ 1 = C(5,5) วิธี นั่นคือ

$$\binom{9}{6} = \binom{8}{5}+\binom{8}{6} = \binom{8}{5}+\left(\binom{7}{5}+\binom{7}{6}\right)$$

$$= \binom{8}{5}+\left(\binom{7}{5}+\left(\binom{6}{5}+\binom{6}{6}\right)\right) = \binom{8}{5}+\left(\binom{7}{5}+\left(\binom{6}{5}+\binom{5}{5}\right)\right)$$

$$\sum_{r=0}^{n} C(n, r) = 2^{n}$$

Ex $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$

แนวคิด วิธีเลือกของกี่ชิ้นก็ได้ จากของ n ชิ้น เท่ากับ ผลรวมของวิธีเลือกของ n ชิ้น เลือกของ n-1 ชิ้น ... เลือกของ 1 ชิ้น และ ไม่เลือกซักชิ้น หรือเท่ากับ การพิจารณาของทีละชิ้นว่า จะเลือก หรือ ไม่เลือก ได้ชิ้นละ 2 วิธี

$\sum\limits_{r\ \text{even}}^{n} C(n,r) = \sum\limits_{r\ \text{odd}}^{n} C(n,r) = 2^{n-1}$ และ $\sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r C(n,r) = 0$

Ex $\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}=\binom{4}{1}+\binom{4}{3}$ และ $\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=0$

แนวคิด พิจารณาการจัดลำดับความยาว n ที่ประกอบด้วยเลข 0 กับ 1 (Ex 1001001 ; n = 7) เมื่อต้องการให้มีเลข 1 เป็นจำนวนคู่ สามารถทำได้โดย สร้างลำดับที่มีความยาว n-1 ก่อน โดยไม่ต้องสนใจว่าจะมี 1 กี่ตัว ซึ่งได้ เท่ากับ 2^{n-1} วิธี ต่อไปเมื่อจะเติมตัวสุดท้ายเข้าไป เราพิจารณาว่า ถ้ามี 1 เป็นจำนวนคู่อยู่แล้วก็เติมเลข 0 แต่ถ้ามี 1 เป็นจำนวนคี่ ก็เติม 1 ไปอีกตัว ต่อท้าย ก็จะได้ 1 จำนวนคู่ตามที่ต้องการ นั่นคือ ทุกลำดับความยาว n-1 จะสามารถสร้าง ลำดับความยาว n ที่มี 1 เป็นจำนวนคู่ได้ 1 แบบ ดังนั้น จำนวนลำดับความยาว n ที่มี 1 เป็นจำนวนคู่ จึงเท่ากับ จำนวนลำดับ ความยาว n-1 (โดยไม่ต้องสนใจว่าลำดับความยาว n-1 มี 1 อยู่เป็น จำนวนคู่หรือไม่)

$C(p+q,r) = \sum\limits_{j=0}^{r} C(p,j)C(q,r-j)$ (convolution rule or Vandermonde identity)

Ex $\binom{11}{4}=\binom{5}{0}\cdot\binom{6}{4}+\binom{5}{1}\cdot\binom{6}{3}+\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}+\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{1}+\binom{5}{4}\cdot\binom{6}{0}$

แนวคิด พิจารณาการเลือกของ r ชิ้น จาก 2 กลุ่ม กลุ่มแรกมี p ชิ้น กลุ่มที่ 2 มี q ชิ้น ได้ C(p+q,r) วิธี หรือ อาจคิดโดย เลือกของจากกลุ่มแรกมา r ชิ้น + เลือกของจากกลุ่มแรกมา r-1 ชิ้น กลุ่มที่สอง 1 ชิ้น + ... + เลือกของจาก กลุ่มแรกมา 1 ชิ้น กลุ่มที่ 2 r-1 ชิ้น + เลือกของจากกลุ่มที่ 2 r ชิ้น ก็ได้

ถ้า p = q = r = n จะได้

$C(2n,n) = \sum\limits_{j=0}^{n} C(n,j)C(n,n-j) = \sum\limits_{j=0}^{n} C^2(n,j)$

Ex
$$\begin{aligned}\binom{10}{5} &= \binom{5}{0}\cdot\binom{5}{5}+\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{4}+\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{3}+\\ &\quad \binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{1}+\binom{5}{5}\cdot\binom{5}{0}\\ &= \binom{5}{0}\cdot\binom{5}{0}+\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}+\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}+\\ &\quad \binom{5}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\cdot\binom{5}{5}\\ &= \binom{5}{0}^2+\binom{5}{1}^2+\binom{5}{2}^2+\binom{5}{3}^2+\binom{5}{4}^2+\binom{5}{5}^2\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i} = \sum_{i=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{i} = 2^{2n}$$

Ex $$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3} = \binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7} = 2^6$$

แนวคิด เลือกของ r ชิ้น จาก 2n+1 ชิ้น จะได้ของ 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ n อีกกลุ่มหนึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ n+1 เสมอ นั่นคือ ในการเลือกของกี่ชิ้นก็ได้จาก 2n+1 ชิ้น (2^{2n+1} วิธี) จะมี จำนวนวิธีที่เลือกของน้อยกว่าหรือเท่ากับ n ชิ้น เท่ากับจำนวนวิธีที่เลือกของมากกว่าหรือเท่ากับ n+1 ชิ้น ดังนั้น แต่ละกรณีจะมี $\frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$ วิธี

$$\begin{aligned}\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3} &= \binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}\\ &= \binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}\\ &= \binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}\\ &= 2^6\end{aligned}$$

การใช้ Binomial Theorem แก้ปัญหาอนุกรม Combination

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}x^k\right)$$

Ex แทน x = 1 ได้ $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

Ex แทน x = 3 ได้ $4^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}3^k\right)$

Ex แทน x = -1 ได้ $\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}\right) = 0$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(k\binom{n}{k}x^{k-1}\right)$$

Ex แทน x =1 ได้ $n(2^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(k\binom{n}{k}\right)$

Ex แทน x = 3 ได้ $n(4^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(k\binom{n}{k}4^{k-1}\right)$